

Μεταβολές της Δυναμικής Ενέργειας στην κατακόρυφη κίνηση σώματος εξαρτημένου από ελατήριο. Με τη βοήθεια λογισμικού LoggerProGR

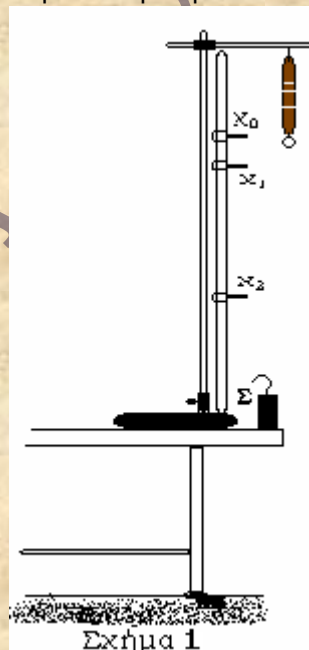
Στόχοι

Οι μαθητές να

- υπολογίζουν το έργο δύναμης που το μέτρο της δεν μένει σταθερό.
- επαληθεύσουν ότι το έργο μιας δύναμης εκφράζει την ενέργεια που μετατρέπεται από μια μορφή σε άλλη.
- επαληθεύσουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας

Θεωρία

Κρεμάμε ένα ελατήριο από ορθοστάτη, (σχ. 1) σταθερά στερεωμένο και σημειώνουμε τη θέση του ελεύθερου άκρου του x_0 , πάνω σε έναν κανόνα που έχουμε τοποθετήσει κατακόρυφα, ώστε να είναι παράλληλος με τη διεύθυνση του ελατηρίου. Στο ελατήριο κρεμάμε ένα σώμα Σ και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί κατακόρυφα, από μια ακραία θέση x_1 (ανώτερη), στην ακραία θέση x_2 (κατώτερη). Στις θέσεις αυτές το σώμα έχει Δυναμική Ενέργεια που οφείλεται, τόσο στην αλληλεπίδρασή του με το πεδίο βαρύτητας της Γης, όσο και στην αλληλεπίδρασή του με το ελατήριο. Δηλαδή έχει Δυναμική Ενέργεια βαρύτητας (U_B) και Δυναμική Ενέργεια ελαστικότητας (U_s). Κατά την κίνηση του σώματος από τη θέση x_1 , προς τη θέση x_2 , έχουμε μείωση της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας, κατά ποσότητα ίση με το έργο της δύναμης βαρύτητας F_B , σ' αυτή τη μετατόπιση και αύξηση της δυναμικής ενέργειας ελαστικότητας, κατά ποσότητα ίση με το έργο της δύναμης ελαστικότητας F_s , του ελατηρίου. Θεωρητικά αποδεικνύεται ότι η δυναμική ενέργεια του σώματος (βαρύτητας και ελαστικότητας) στις δύο ακραίες θέσεις διατηρείται σταθερή. (με την προϋπόθεση τριβές και όποιες άλλες αντιστάσεις να είναι μηδενικές).



Σχήμα 1

Γνωρίζουμε ότι το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων (ή το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων) που δρουν πάνω σε ένα σώμα ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας, $W_{F_{ολ}} = \Delta K$, επειδή όμως η $\Delta K = 0$, (στη θέση x_1 , $K_1 = 0$ και στη θέση x_2 , $K_2 = 0$, $K_1 - K_2 = \Delta K = 0$), είναι και $W_{F_{ολ}} = 0$. Οι δυνάμεις που παράγουν έργο στην κίνηση από x_1 μέχρι x_2 είναι, η δύναμη βαρύτητας F_B , που παράγει θετικό έργο ίσο με τη μείωση της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας ($W_{F_B} = U_{B1} - U_{B2}$) και η δύναμη ελαστικότητας F_s , που παράγει αρνητικό έργο ίσο με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας ελαστικότητας ($W_{F_s} = U_{s1} - U_{s2}$)

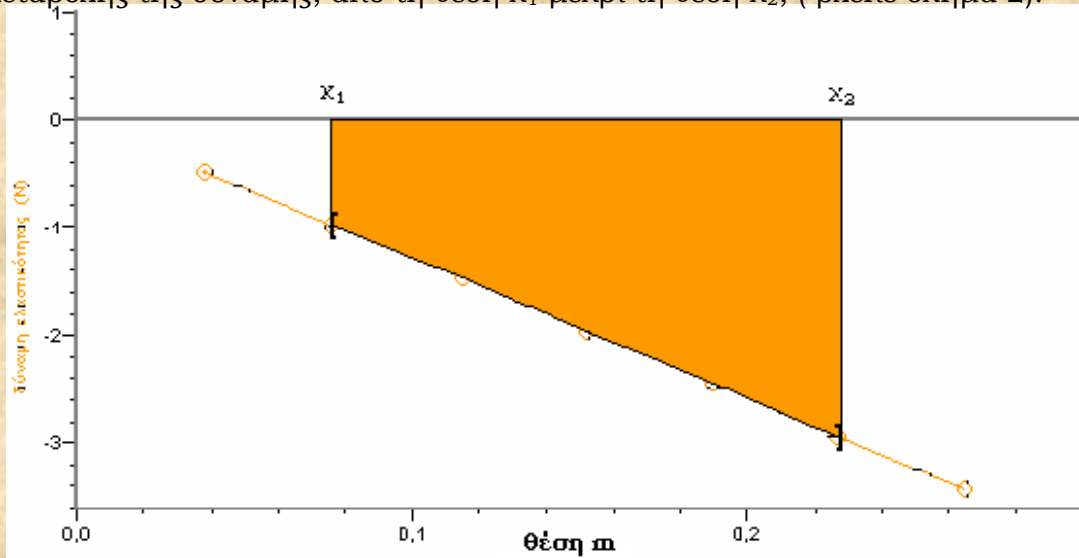
$$W_{F_{ολ}} = W_{F_B} + W_{F_s} = 0 \quad \text{ή} \quad -W_{F_B} = W_{F_s} \quad \text{αλλά και}$$

$$-(U_{B2} - U_{B1}) - (U_{s2} - U_{s1}) = 0 \quad \text{ή}$$

$$U_{B1} - U_{B2} + U_{s1} - U_{s2} = 0 \quad \text{ή} \quad (U_{B1} + U_{s1}) - (U_{B2} + U_{s2}) = 0$$

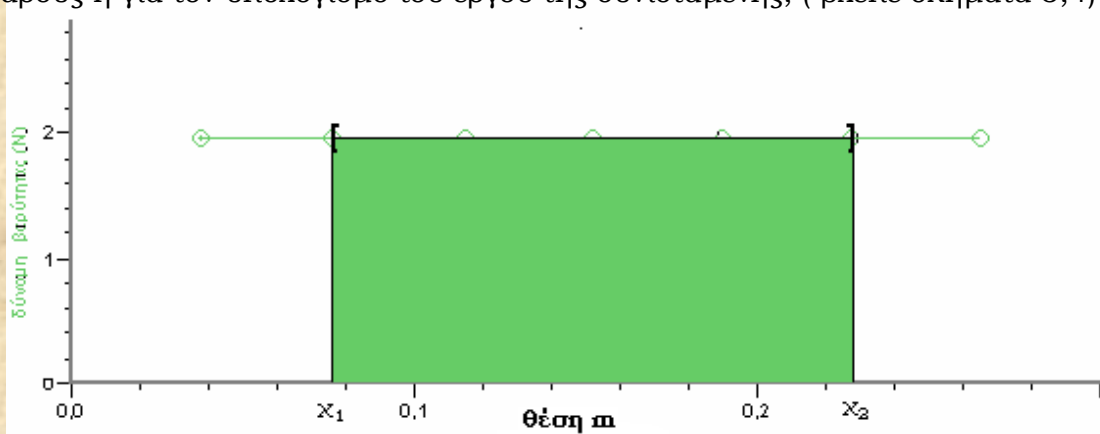
$$\text{Τελικά } U_1 - U_2 = 0 \quad \text{ή} \quad U_1 = U_2 \quad \text{δηλαδή } \mathbf{U = σταθ.}$$

Υπολογισμός του έργου των δυνάμεων. Επειδή η δύναμη ελαστικότητας δεν παραμένει σταθερή στο μέτρο, για τον υπολογισμό του έργου της, καταφεύγουμε στο διάγραμμα μεταβολής της σε συνάρτηση με τη θέση ($F = k \cdot x$). Σε αυτό το διάγραμμα, όπως είναι γνωστό, το έργο της δύναμης ισούται με το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται από τον άξονα της θέσης και τη γραμμή μεταβολής της δύναμης, από τη θέση x_1 μέχρι τη θέση x_2 , (βλέπε σχήμα 2).

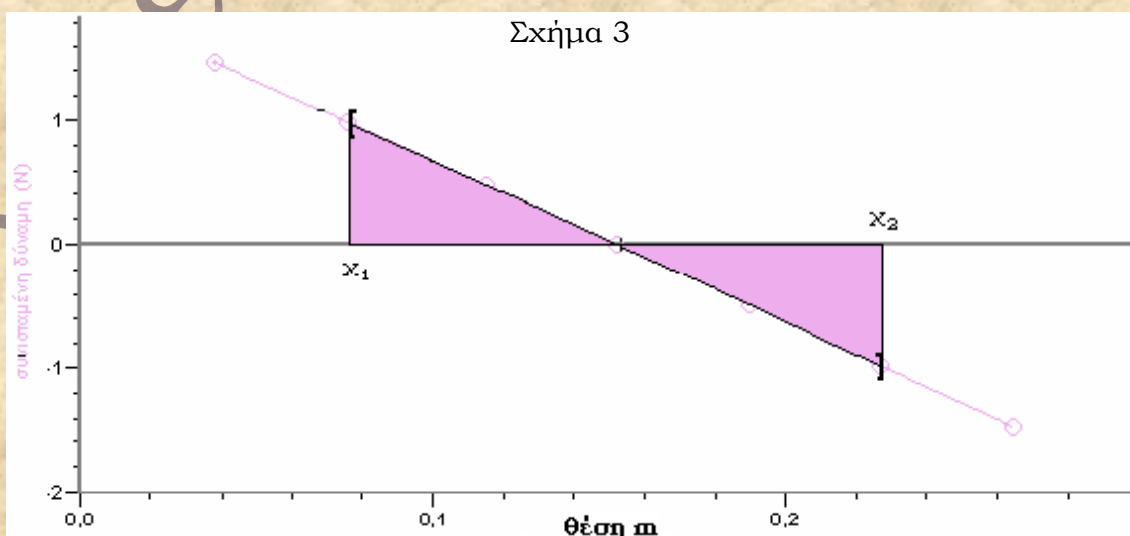


Σχήμα 2

Το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε και για τον υπολογισμό του έργου του βάρους ή για τον υπολογισμό του έργου της συνισταμένης, (βλέπε σχήματα 3,4)



Σχήμα 3

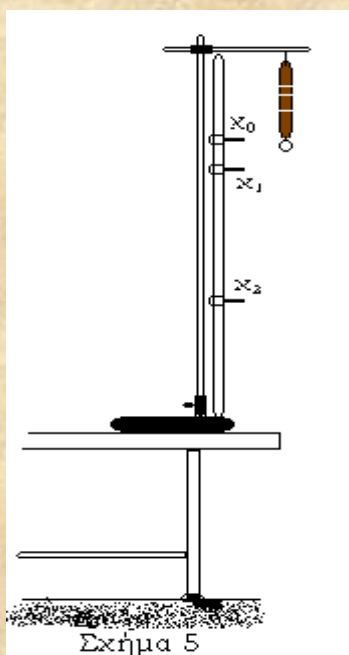


Σχήμα 4

Απαραίτητα όργανα και συσκευές: Ένα χαλύβδινο σπειροειδές ελατήριο με χαρακτηριστικά: $K= 13\text{N/m}$, διάμετρος 10mm, μάζα 10 g, μήκος 10cm, μέγιστη επιμήκυνση 40 cm και μέγιστη δύναμη 4N. Τρία σώματα (βαράκια) με μάζες 50, 100 και 200 g. Βάση παραλληλόγραμμη, ράβδος μεταλλική των 80 cm, ράβδος μεταλλική των 30 cm, δακτύλιος ορειχάλκινος με άγκιστρο, σύνδεσμοι απλοί. Μετρικός κανόνας ενός μέτρου. (υπόψη ότι στα Γενικά Λύκεια υπάρχει ειδική συσκευή με το όνομα: Συσκευή διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας και κωδικό ΜΣ 310.0).

Για την κατασκευή των διαγραμμάτων και το άμεσο υπολογισμό του έργου των δυνάμεων από τα διαγράμματα θα χρησιμοποιήσουμε το λογισμικό LoggerProGr της Vernier .

A. Πειραματική διαδικασία.



1. Συναρμολογείτε τη συσκευή – ορθοστάτη και κανόνα- όπως στο σχήμα 5. Κρεμάστε από το άγκιστρο του δακτυλίου το ελατήριο και αφού ηρεμίσει, σημειώστε πάνω στον κανόνα τη θέση του ελεύθερου άκρου του. Ονομάστε αυτή τη θέση x_0 και θεωρήστε την σαν αρχή για τη μέτρηση των θέσεων (θετική η φορά προς τα κάτω).
2. Κρεμάστε στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου το σώμα με μάζα 200g και αφήστε το να ηρεμίσει. Ποιες δυνάμεις ασκούνται επάνω του όταν ισορροπεί; Φτιάξτε το διανυσματικό διάγραμμα των δυνάμεων.
3. Ας ανυψώσει κάποιος με το χέρι του το σώμα, μέχρι που το άκρο του ελατηρίου να βρεθεί 0,08 m πιο κάτω από τη θέση x_0 . Σημειώστε αυτή τη θέση σαν x_1 . Απ’ αυτή τη θέση αφήστε ελεύθερο το σώμα – προσοχή να μην ασκηθεί πάνω του καμία ώθηση – και σημειώστε την κατώτερη θέση, που φθάνει

τώρα το άκρο του ελατηρίου, σαν x_2 . Ίσως εδώ χρειαστεί να προσπαθήσετε περισσότερες από μια φορές για να εντοπίσετε με ακρίβεια τη θέση x_2 .

B. Επεξεργασία.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης του σώματος μάζας 200g από τη θέση x_1 μέχρι τη θέση x_2 , ασκούνται πάνω του δύο δυνάμεις, η δύναμη του βάρους F_β και η δύναμη ελαστικότητας του ελατηρίου F_s .

4. Ποιο θα είναι το πρόσημο της δύναμης του βάρους F_β και ποιο το πρόσημο της δύναμης του ελατηρίου F_s ; (θετική η φορά προς τα κάτω).
5. Ποια από τις δύο παραμένει στο μέτρο σταθερή και ποια μεταβάλλεται καθώς το σώμα κινείται από τη θέση x_1 στη θέση x_2 ;

Γ. Υπολογισμός έργου. Επειδή μια από τις δυνάμεις δεν έχει σταθερό μέτρο, για τον υπολογισμό του έργου των δυνάμεων καταφεύγουμε στο διάγραμμα τους. Κατασκευή διαγραμμάτων.

6. α. Για να φτιάξετε το διάγραμμα της δύναμης του ελατηρίου F_s σαν συνάρτηση της θέσης x , χρειάζεται να κρεμάσετε, διαδοχικά από το

ελατήριο, σώματα διαφόρων μαζών (αποφύγετε να κρεμάσετε σώματα με μάζα μεγαλύτερη των 400 g) ώστε να συμπληρώσετε τον πίνακα 1

7. Φτιάξτε, στο ίδιο σχήμα, τα διαγράμματα των δυνάμεων F_{β} και F_s σαν συναρτήσεις της θέσης x . (προσοχή στο πρόσημο τους).
8. Από τα παραπάνω διαγράμματα υπολογίστε τα έργα $W_{F_{\beta}}$ και W_{F_s} , για τη διαδρομή από τη θέση x_1 στη θέση x_2 και συγκρίνετε τα μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης σας οδηγεί σε κάποιο συμπέρασμα για το αλγεβρικό άθροισμα των δύο έργων; Μπορείτε, αν θέλετε, στο ίδιο σχήμα να κατασκευάσετε και το διάγραμμα της συνισταμένης δύναμης α ως συνάρτηση της θέσης x . Πόσο είναι το έργο αυτής της δύναμης για τη διαδρομή από το x_1 στο x_2 ;

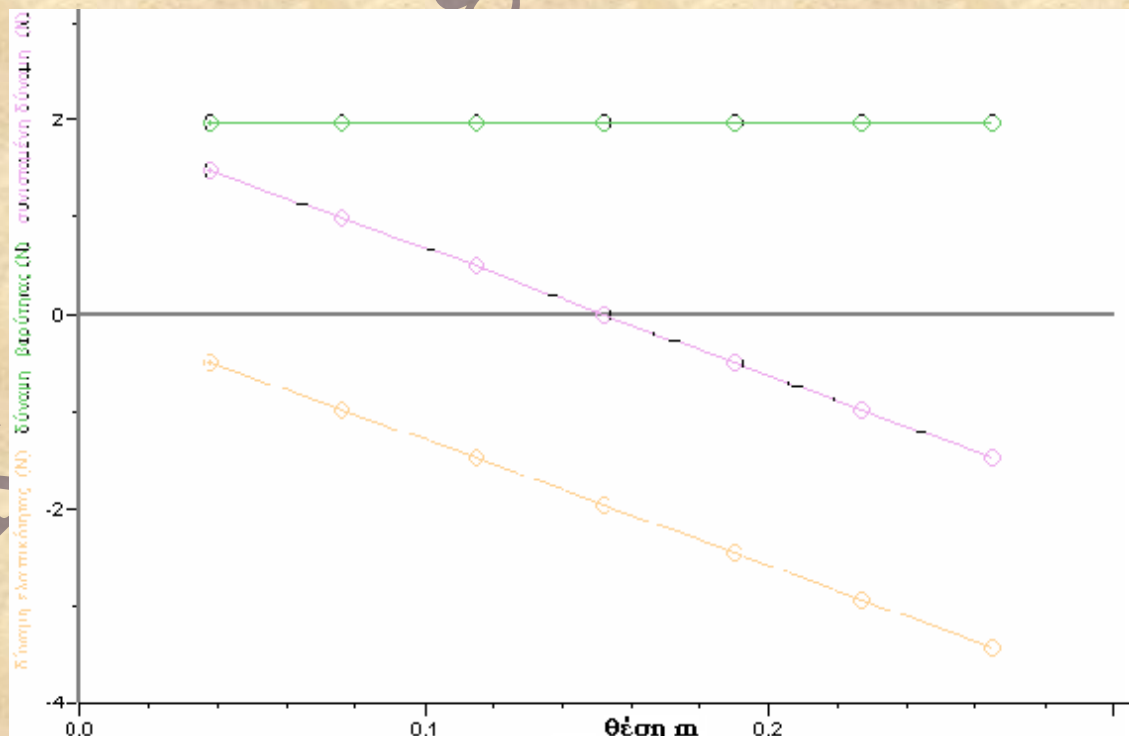
Δ. Ενέργειες. Κατά την κίνηση του σώματος μάζας 200g από τη θέση x_1 στη θέση x_2

9. α. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση x_1 , πόση στη θέση x_2 και ποια η μεταβολή της από τη θέση x_1 στη θέση x_2 ;
β. Σύμφωνα με το θεώρημα της Κινητικής Ενέργειας, πόσο περιμένετε να είναι το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μάζας 200g από τη θέση x_1 μέχρι τη θέση x_2 ; Το αποτέλεσμα συμφωνεί με την απάντησή σας στο ερώτημα 8;
10. α. Υπολογίστε τις διαφορές της δυναμικής ενέργειας του σώματος μάζας 200g από τη θέση x_1 στη θέση x_2 που οφείλονται i) στην αλληλεπίδραση του με τη Γη ($U_{\beta 1} - U_{\beta 2}$)=, (βαρύτητας). ii) στην αλληλεπίδραση του με το ελατήριο ($U_{1s} - U_{2s}$)=, (ελαστικότητας) β. Ποια σχέση έχουν μεταξύ τους αυτές οι διαφορές;
11. Τι εκφράζει το έργο, της κάθε μιας από τις δυο παραπάνω δυνάμεις αλληλεπίδρασης, για τη διαδρομή του σώματος μάζας 200g από τη θέση x_1 στη θέση x_2 ;
12. Βρείτε πάνω στο διάγραμμα το σημείο που βρίσκεται στο μέσο της διαδρομής x_1 , x_2 και σημειώστε το με x_{μ} . Υπολογίστε τώρα τις διαφορές i) της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας και ii) της δυναμικής ενέργειας ελαστικότητας από το x_1 στο x_{μ} . Συγκρίνετε μεταξύ τους αυτές τις διαφορές. Πώς θα δικαιολογήσετε το αποτέλεσμα;

Προετοιμασία του LoggerProGr για τα διαγράμματα.

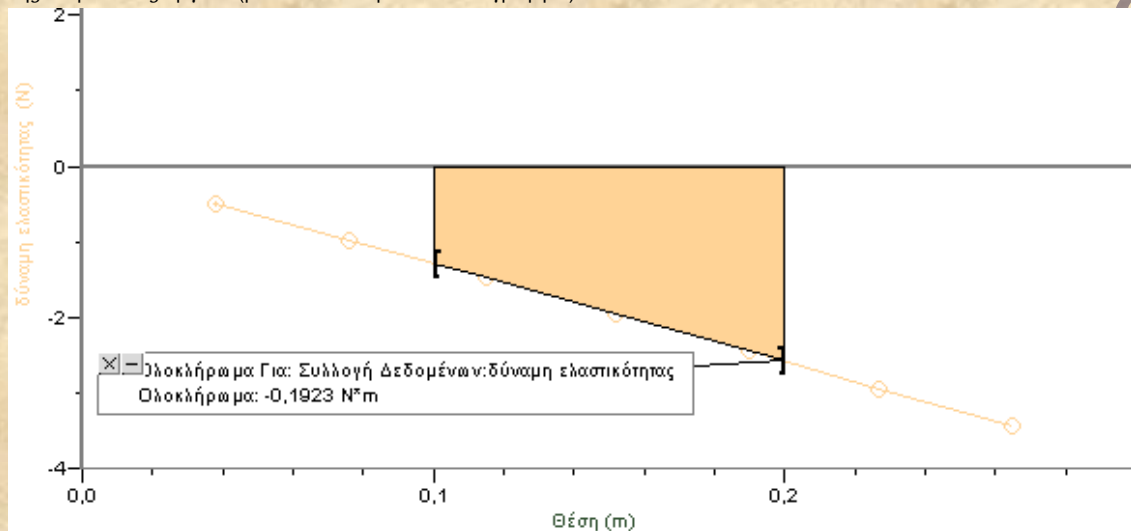
Ανοίγουμε το LoggerProGr χωρίς διασύνδεση (αισθητήρες). Στην οθόνη εμφανίζεται αριστερά, ο πίνακας συλλογής δεδομένων με δύο στήλες την X και την Y και το υπόλοιπο μέρος καταλαμβάνει το καρτεσιανό διάγραμμα με τους άξονες X και Y. **Ονομασία στηλών και αξόνων.** Πατήστε δεξί κλικ πάνω στο διάγραμμα και στο μενού που εμφανίζεται επιλέξτε **επιλογές στηλών**, επιλέξτε τη στήλη που θέλετε να της αλλάξετε το όνομα π.χ X και στο παράθυρο που εμφανίζεται, στον **ορισμό στηλών** , στο **όνομα**, μεταφέρετε με αντιγραφή και επικόλληση από ένα Word, τη λέξη θέση, στο **σύντομο όνομα** , το σύμβολο του μεγέθους που απεικονίζει η στήλη (εδώ το σύμβολο x) και στο **Μονάδες**, τις μονάδες μέτρησης του μεγέθους (εδώ m). Επίσης το **κλειδίωμα στήλης (αποφυγή επεξεργασίας)** να μην είναι τσεκαρισμένο, πράγμα που σημαίνει πως μπορούμε να επεξεργαστούμε τη συγκεκριμένη στήλη. Περάστε μετά στις **Επιλογές**, επιλέξτε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων που θέλετε να έχουν οι αναγραφόμενοι στη στήλη αριθμοί καθώς και το χρώμα στήλης και διαγράμματος. Μετά απ’ αυτά πατάτε ολοκληρώθηκε. Το ίδιο μπορείτε να κάμετε για τη στήλη Y (στο **όνομα**: δύναμη βαρύτητας, στο **σύντομο όνομα**: F_B και στο **Μονάδες**: N) και για οποιαδήποτε άλλη στήλη. Με την αλλαγή του ονόματος της στήλης άλλαξε και το όνομα στον αντίστοιχο άξονα. **Αλλαγή κλίμακας.** Για να αλλάξουμε την κλίμακα στον άξονα "θέση" τοποθετούμε το ποντίκι πάνω στην ταμπέλα του άξονα και πατάμε αριστερό κλικ. Από τη λίστα επιλογών που εμφανίζεται επιλέγουμε **επιπλέον**. Στο παράθυρο που εμφανίζεται επιλέγουμε κλίμακα **μη αυτόματη** και ρυθμίζουμε αριστερά -4, δεξιά 4 και πατάμε OK. Μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να αλλάξουμε την κλίμακα και στον άλλο άξονα.

Εισαγωγή στηλών. Εκτός από τις στήλες X και Y, που τις μετονομάσαμε σε "θέση" και "δύναμη βαρύτητας" αντίστοιχα θα χρειαστούμε άλλες δύο για να καταγράψουμε τις τιμές της δύναμης ελαστικότητας και της συνισταμένης δύναμης. **Για τη δύναμη ελαστικότητας:** Από το μενού **δεδομένα** του LoggerProGr επιλέγουμε **νέα μη αυτόματη στήλη** και στο παράθυρο που εμφανίζεται δουλεύουμε όπως δουλέψαμε παραπάνω για τη στήλη Y (στο **όνομα**: δύναμη ελαστικότητας, στο **σύντομο όνομα**: F_s και στο **Μονάδες**: N). **Για τη συνισταμένη δύναμη** όμως, επειδή οι τιμές της έχουν σχέση με τις τιμές των στηλών "δύναμη βαρύτητας" και "δύναμη ελαστικότητας", από το μενού **δεδομένα** του LoggerProGr επιλέγουμε **νέα υπολογισμένη στήλη** και στο παράθυρο που εμφανίζεται από το **συναρτήσεις** επιλέγουμε τις δύο συναρτήσεις που οι τιμές τους έχουν σχέση με τη στήλη που δημιουργούμε, οι επιλογές που κάνουμε εμφανίζονται **στο εξίσωση**. Εμείς δεν έχουμε να κάνουμε τίποτε άλλο παρά ανάμεσα στο "δύναμη βαρύτητας" και "δύναμη ελαστικότητας" να γράψουμε το +,οπότε στο πλαίσιο **εξίσωση** υπάρχει γραμμένη η φράση "δύναμη βαρύτητας" + "δύναμη ελαστικότητας". Έτσι, όταν εμείς καταγράψουμε τις τιμές των δυνάμεων βαρύτητας και ελαστικότητας στις αντίστοιχες στήλες, στη στήλη "συνισταμένη δύναμη", εμφανίζονται αυτόματα οι τιμές της. Για να εμφανιστούν τα δεδομένα μιας στήλης στο διάγραμμα εργαζόμαστε ως εξής: Τοποθετούμε το ποντίκι πάνω στην ταμπέλα του άξονα Y και πατάμε αριστερό κλικ. Από τη λίστα επιλογών που εμφανίζεται επιλέγουμε **επιπλέον**. Στο παράθυρο που εμφανίζεται στο **ίκνη του άξονα -Y**, τσεκάρουμε όσες (μία ή περισσότερες) από τις συναρτήσεις που εμφανίζονται εκεί. Όλων των συναρτήσεων που τσεκάρουμε, οι τιμές, περνούν στον άξονα Y. Έτσι το διάγραμμα μας μπορεί να περιέχει, κάθε συνάρτηση χωριστά, τις συναρτήσεις ανά δύο ή όλες μαζί.



Στο παραπάνω διάγραμμα φαίνονται και οι τρεις συναρτήσεις μαζί.

Υπολογισμός του έργου μιας δύναμης από το διάγραμμα της με τη βοήθεια του LoggerProGr: Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το έργο της δύναμης ελαστικότητας από το διάγραμμα της. Στο διάγραμμα της δύναμης, παρατηρούμε το σχήμα του κένσορα να έχει σχήμα σταυρού, ενώ πάνω στους άξονες ή πάνω στους τίτλους των αξόνων παίρνει άλλα σχήματα. Φέρνουμε τον κένσορα κοντά στον άξονα X - "θέση", ώστε να έχει το σχήμα σταυρού πατάμε αριστερό κλικ και σύρουμε, για παράδειγμα από το 0,1 μέχρι 0,2. Δημιουργούμε έτσι μια ταινία. Στη συνέχεια από το μενού **ανάλυση** επιλέγουμε **ολοκλήρωμα**, οπότε στο διάγραμμα εμφανίζεται γραμμοσκιασμένη η περιοχή που επιλέξαμε και ταυτόχρονα υπολογισμένο το εμβαδόν της σε μονάδες έργου. (βλέπε στο παρακάτω διάγραμμα).



Φ Υ Λ Λ Ο Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α Σ

Μεταβολές της Δυναμικής Ενέργειας στην κατακόρυφη κίνηση σώματος εξαρτημένου από ελατήριο.

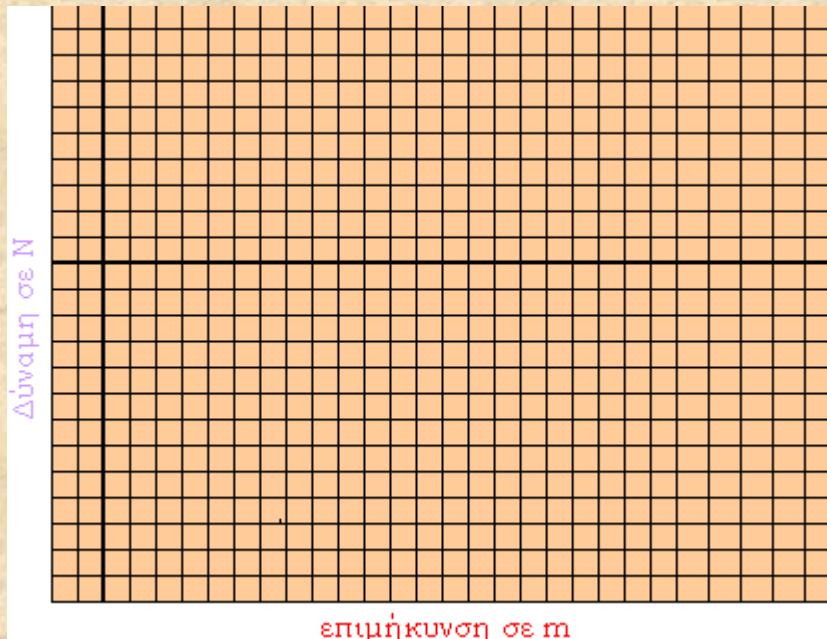
ΤΜΗΜΑ ΟΝΟΜΑ
 ΟΜΑΔΑ ΕΠΩΝΥΜΟ

- A.
1. θέση $x_0 = \dots\dots\text{cm}$ Θεωρούμε όμως τη θέση x_0 σαν αρχή για τη μέτρηση των θέσεων, επομένως $x_0 = 0 \text{ m}$.
 2. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα με μάζα 200g είναι:
 - α. η δύναμη με μέτροN και κατεύθυνση
 - β. η δύναμη με μέτροN και κατεύθυνση
 - γ. διανυσματικό διάγραμμα.
 3. θέση $x_1 = \dots\dots\text{cm}$ θέση $x_2 = \dots\dots\text{cm}$
- B.
4. Το πρόσημο της δύναμης του ελατηρίου είναι (...)
 5. Η δύναμη που παραμένει σταθερή στο μέτρο καθώς το σώμα κινείται από τη θέση x_1 στη θέση x_2 είναι η δύναμημε μέτρο ...=N ενώ μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης
- Γ.
6. Συμπληρώστε τον πίνακα 1.(στην τιμή των δυνάμεων λάβετε υπόψη σας το πρόσημο τους και ότι $g = 9,8 \text{ N/Kg}$).

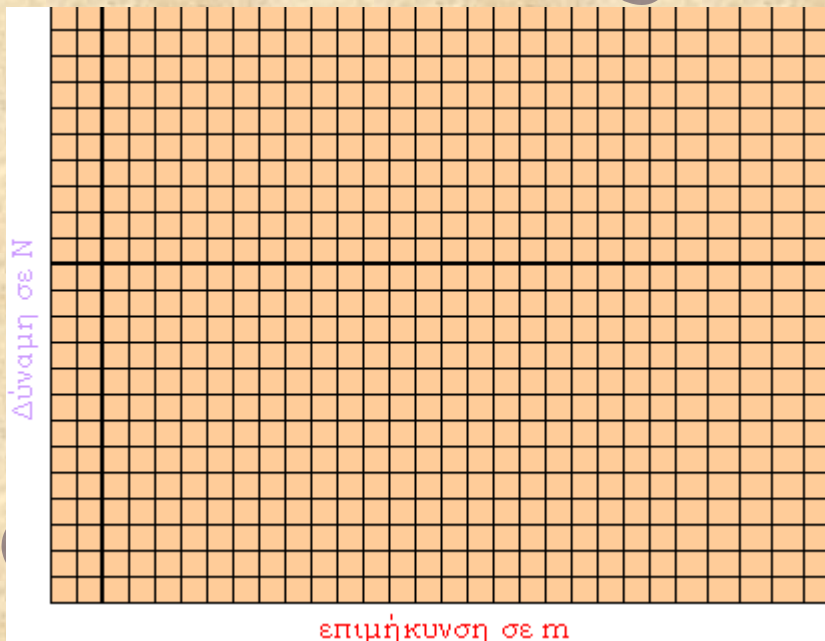
Πίνακας 1

Μάζα σε g	Θέση x σε cm	Δύναμη F_s σε N	Δύναμη F_β σε N	Συνισταμένη $F_{ολ.}$ σε N
0	0			
50				
100				
150				
200				
250				
300				

7. Με τη βοήθεια του πίνακα 1, να κατασκευάσετε τα διαγράμματα $F_\beta = f(\Delta x)$ και $F_s = f(\Delta x)$, στο ίδιο σχήμα.



8. Με τη βοήθεια των διαγραμμάτων υπολογίστε το έργο των δυνάμεων βαρύτητας και ελαστικότητας για τη διαδρομή $x_1 - x_2$.
- $W_{Fβ} = \dots\dots\dots$
- $W_{Fε} = \dots\dots\dots$
- Το $W_{Fβ}$ είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή περίπου ίσο με το $W_{Fε}$;
- Επομένως $\Sigma W_F = \dots\dots\dots J$.



- Προαιρετικά μπορείτε να κατασκευάσετε το διάγραμμα της συνισταμένης σαν συνάρτηση της θέσης και από αυτό να υπολογίσετε το έργο της για την ίδια διαδρομή.
- $W_{F_{ολ}} = \dots\dots\dots$

9. α. στη θέση x_1 $K_1 = \dots\dots\dots J$, στη θέση x_2 $K_2 = \dots\dots\dots J$.
 $\Delta K = \dots\dots\dots J$
 β. $\Sigma W_F = \Delta K = \dots\dots\dots J$. Το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μάζας 200g από τη θέση x_1 μέχρι τη

θέση x_2 είναι J, που με την απάντηση στο ερώτημα 8.

10. Για τον υπολογισμό στηριχθείτε στο συμπέρασμα του βιβλίου σας: ... αν μεταξύ δύο σωμάτων υπάρχει αλληλεπίδραση F , τότε : ορίζουμε ως αντίστοιχη διαφορά της δυναμικής ενέργειας του συστήματος σε μια μεταβολή, το έργο της δύναμης αλληλεπίδρασης κατά τη μεταβολή αυτή.
Επομένως α. $U_{\beta 1} - U_{\beta 2} =$
 $U_{1s} - U_{2s} =$
β. συμπέρασμα
11. Το έργο της δύναμης βαρύτητας εκφράζει
.....
ενώ το έργο της δύναμης ελαστικότητας εκφράζει
.....
12. i) $U_{\beta 1} - U_{\beta \mu} =$
ii) $U_{1s} - U_{2\mu} =$
συμπέρασμα και
αυτό οφείλετε στο ότι στη θέση x_μ το σώμα έχει και..... ενέργεια.

Την εργαστηριακή άσκηση επιμελήθηκε ο γ. Κουρούκλης